



Pakiet do rachunku prawdopodobieństwa IV 3159

Jo Boaler i David Fielker



SI IV 3159 07/18

Czy możesz być pewny?
OSTRZEŻENIE! Nieodpowiednie dla dzieci w wieku poniżej 3 lat.
Zawiera kule/mate elementy. Ryzyko zadławienia.



nowa szkoła
ul. POW 25, 90-248 Łódź,
www.nowaszkoła.com
tel. (42) 630 17 28,
(42) 630 04 88, fax: (42) 632 73 28

OSTRZEŻENIA!



1. Zabawka przeznaczona jest dla dzieci powyżej 3 lat. Zawiera małe elementy – ryzyko zadławienia.
2. Do użytku pod bezpośrednim nadzorem osoby dorosłej
3. Należy zachować opakowanie lub/i instrukcję. Zawierają one ważne informacje mogące być przydatne w przyszłości.
4. **Użytkowanie niezgodne z zaleceniami zwalnia producenta od odpowiedzialności za ewentualne szkody.**

Zdarzenie pewne i niepewne

Prawdopodobieństwo dotyczy w zasadzie niepewności. Pierwszym krokiem jest ustalenie, że pewne zdarzenia na pewno się wydarzą, pewne są niemożliwe, a inne są niepewne.

Dobłą podstawą do opracowania koncepcji prawdopodobieństwa jest przedyskutowanie w małych grupach prawdopodobnego przyszłego wyniku omawianego zdarzenia.

Jak myślisz, kto będzie kolejną osobą, która wejdzie do klasy?



Puk, puk! Kto tam?

Jeśli jest to pierwsza lekcja od rana, a nie wszyscy uczniowie są obecni, może to być jeden ze spóźnionych uczniów. Trochę później, może to być klasowy dyżurny, który wyszedł wykonać swoje zadania i zaraz po jego wykonaniu wróci. W innym przypadku może to być dyrektor, który w tym czasie nie ma innych obowiązków. Po zakończonych lekcjach, może to być rodzic, odbierający swoje dziecko.

Na oszacowanie prawdopodobieństwa wpływa wiele różnych czynników takich jak pora dnia, czy szczególne okoliczności. Jeśli zainteresujemy się śledzeniem tej sytuacji, możemy zacząć rejestrować kto wchodzi przez drzwi klasy w różnych porach dnia i w różnych okolicznościach. Następnie możemy sprawdzić, czy istnieje wzór określający kto i kiedy wchodzi do klasy.

Jeśli z zamkniętymi oczami wskażę nazwisko na liście obecności uczniów, wybiorę kogoś, kto był danego dnia obecny w szkole.

Zachęć uczniów do zastanowienia się, czy jest to zdarzenie pewne, możliwe, czy niemożliwe. Po postawieniu problemu uczniowie mogli-

Butelki do pobierania próbek

Butelki do pobierania próbek dają możliwość rozważania i zbadania różnych pojęć związanych z prawdopodobieństwem. W butelkach z krótkimi rurkami umieszczana jest jedna kula jednego koloru, a prawdopodobieństwo będzie się zmieniać w zależności od liczby tych kul. Na przykład jakie będzie prawdopodobieństwo otrzymania kuli czerwonej, jeśli do dyspozycji jest jedna kula czerwona i dziewięć białych? Poproś dzieci o oszacowanie takiego prawdopodobieństwa, a następnie eksperymentujcie. Mogą przeprowadzić serię różnych doświadczeń, zamieniając liczbę i kolory kul, a następnie przeanalizować swoje dane i porównać wyniki doświadczeń z prawdopodobieństwami, które oszacowali.

Butelki z długimi rurkami zawierają dziesięć kul, które mogą pomóc uczniom

w opracowaniu pomysłów związanych z połączeniem niezależnych zdarzeń – na przykład jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch czerwonych kul? Dziesięciu czerwonych kul? W jaki sposób zmieniają się prawdopodobieństwa przy różnych ilościach kolorów?

Prawdopodobieństwo jest ekscytującą dziedziną matematyki, lubianą przez uczniów, którzy w naturalny sposób mają możliwość dyskusowania na temat matematycznych pomysłów oraz rozwijania wiedzy matematycznej. Daje również sposobność wykorzystania umiejętności z całego programu nauczania, w szczególności

z gromadzenia, analizowania i prezentowania danych, a także z pracy na liczbach – ułamki, liczby dziesiętne, mnożenie, dodawanie itp. Istnieje też możliwość wykorzystania kontekstów, dopasowanych i mających znaczenie dla uczniów, gdyż prawdopodobieństwo jest częścią wielu dziedzin życia i można je włączyć do dyskusji, które zawierają elementy społeczne, technologiczne, historyczne, naukowe itp.

Każda liczba w trójkącie jest sumą dwóch liczb, znajdujących się ponad nią:



Trójkąt Pascala może być użyty do określenia prawdopodobieństwa. Na przykład, jeśli kule mają wpaść do piątej linii we wzorze:

1 4 6 4 1

prawdopodobieństwo dla każdej pozycji wynosi

$\frac{1}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{6}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{1}{16}$

następna linia wgląda następująco

1 5 10 10 5 1

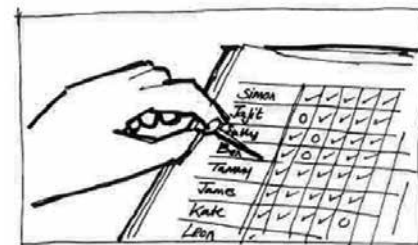
i prawdopodobieństwa wynoszą odpowiednio

$\frac{1}{32}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{1}{32}$

Jeśli dzieci będą rozbudowywać swoje trójkąty, powinny być w stanie ustalić prawdopodobieństwa dla każdej linii z tacy zbiorczej binostatu. Połączenie w praktyce teorii i danych oraz dołączając do tego dyskusje, które powstają w wyniku przeprowadzania doświadczeń, pozwala na opracowanie wielu probabilistycznych pojęć. Na przykład: szacowanie prawdopodobieństwa wypadnięcia kulek w określonych miejscach, identyfikacja wszystkich możliwych wyników wypadnięcia dwóch piątek do trzeciej linii, omawianie prawdopodobieństwa jakiegokolwiek pozycji na linii lub obliczanie prawdopodobieństwa, że kula nie będzie miała określonego położenia na linii, zbieranie i analizowanie danych zebranych podczas przeprowadzania doświadczeń, itp.

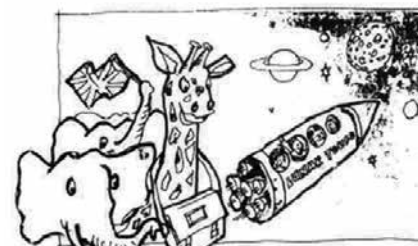
W Trójkącie Pascala znajduje się kombinacja liczb nieparzystych i parzystych, a liczby te tworzą wiele interesujących wzorów, które dzieci mogą odkrywać. Pozwala to na wprowadzenie na przykład wzorów skróconego mnożenia.

by zacząć zbierać dane na temat uczęszczania poszczególnych uczniów do szkoły. Mogliby zainteresować się tym, kto chodzi do szkoły pieszo, kto jeździ autobusem, samochodem itp. i zilustrować to graficznie lub za pomocą grafu. Szukanie prawdopodobieństwa stwarza uczniom wiele możliwości dyskusowania o matematyce. Stanowi też okazje dla uczniów do gromadzenia danych, przedstawiania swoich wyników, zastanawiania się co one oznaczają i wyciągania odpowiednich wniosków.



Czy Ben był dziś obecny w szkole?

Istnieje nieskończenie wiele sytuacji, o których uczniowie mogą dyskutować i zastanawiać się, czy są one pewne, możliwe, czy niemożliwe.



Czy możesz być pewny?

Oto kilka przykładów:

- Następną osobą, która wejdzie przez drzwi będzie dziewczyna.
- Mój miś przebiegnie dziesięć kilometrów.
- Kiedy będę mieć 11 lat, będę mieć 2 m wzrostu.
- Będę młodszy.
- Pewnego dnia pojadę rowerem do Australii.
- Jutro zamienię się w żyrafę.
- Kiedy będę starszy, będę mógł spędzić wakacje na Księżycu.
- Pewnego dnia dzikie stonie zamieszkają w Anglii.

Możesz również poprosić uczniów, aby sami spróbowali przedstawić kilka wydarzeń, które ich zdaniem są pewne, niemożliwe lub możliwe. Zazwyczaj prowadzi to do bardzo interesującej dyskusji, twórczego myślenia i generowania różnorodnych pomysłów.

Prawdopodobieństwo

Po dyskusji uczniów na temat sposobu opisu prawdopodobieństwa, uczniowie mogą uznać, że określenia zdarzenie pewne, niemożliwe i możliwe nie są wystarczające do opisu wszystkich sytuacji. Sami mogą zaoferować takie określenia jak „mało prawdopodobne” lub „może”. Jest to bardzo pożądane i użyteczne – oznacza stopniowy rozwój bardziej wyrafinowanych pomysłów na temat określania prawdopodobieństwa. Aby stymulować uczniów do dalszego rozwoju przedstaw im kilka sytuacji (wypisane poniżej) i poproś o określenie ich prawdopodobieństwa za pomocą następujących słów:

bardzo prawdopodobne

prawdopodobne

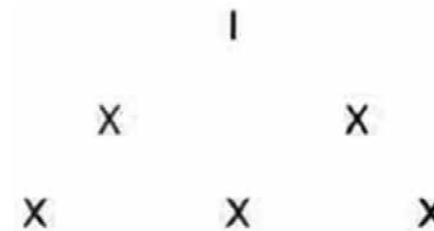
mało prawdopodobne

bardzo mało prawdopodobne

Sytuacje:

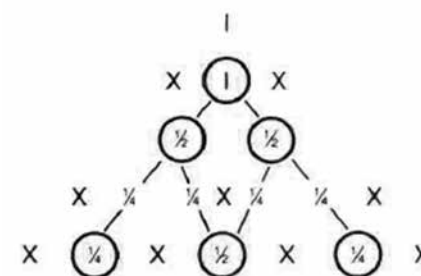
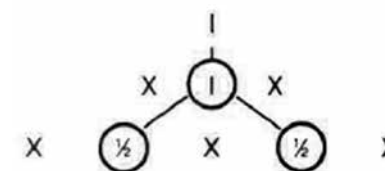
- Jutro będzie padał śnieg.
- Będziemy dziś trochę malować.
- Kiedy będę starszy, zostanę gwiazdką muzyki pop.
- Jutro do mojej klasy wleci ptak.
- Zjem dziś jabłko.

Inną aktywnością, którą można zaproponować uczniom jest przekazanie im listy przedmiotów i poproszenie ich aby wzięli je na wakacje lub wycieczkę. Zadaniem uczniów jest posortowanie ich ze względu na te, których „nie wezmą, wezmą, może wezmą” itp.

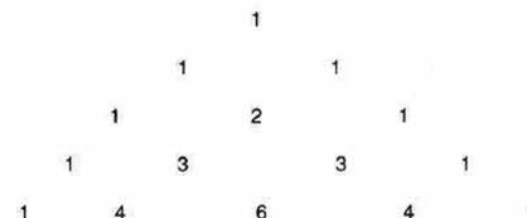


Kiedy kula wpada przez szczelinę, może przejść w jednym z dwóch kierunków, więc prawdopodobieństwo dla każdego kierunku wynosi $1/2$.

Można to przedstawić w poniższy sposób:



Pascal pokazał te sytuacje, pisząc różne sposoby, w jakie kula mogłaby spaść przez kotki w oparciu o powyższe linie. Pierwszych pięć linii jego trójkąta wygląda następująco:



Z powyższej tabeli wynika, że suma 11 występuje dokładnie dwa razy na 36 możliwych, a zatem prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy równej 11 wynosi $\frac{1}{18}$.

Ostatecznie, po obliczeniu prawdopodobieństw każdego możliwego wyniku, uczniowie mogą zauważyć, że suma wszystkich prawdopodobieństw wynosi 1. Oznacza to, że powiedzenie, że prawdopodobieństwo otrzymania któregoś z wypisanych w tabeli wyników wynosi 1, ponieważ zdarzenie takie jest pewne, gdyż rzucając dwa razy kostką otrzymana suma będzie zawierać się w przedziale od 2 do 12. Jeśli dane zdarzenie jest pewne, jego prawdopodobieństwo wynosi 1, jeśli natomiast jest niemożliwe, wówczas jego prawdopodobieństwo wynosi 0. Podnosząc poziom, warto skierować uwagę uczniów na to, że jeśli prawdopodobieństwo na przykład wylosowania sumy 12 wynosi $\frac{1}{36}$, to prawdopodobieństwo, że suma nie będzie równa 12 wynosi $\frac{35}{36}$. Wynika stąd, że prawdopodobieństwo tego, że coś się nie stanie jest równe 1 odjąć prawdopodobieństwo **wystąpienia** tego zdarzenia.

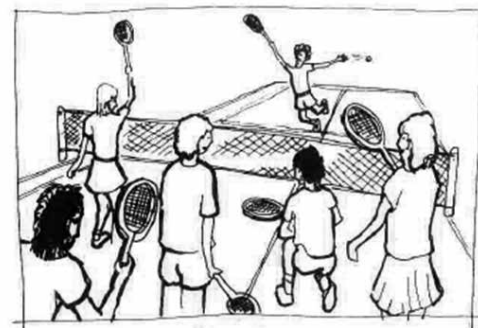
Model Binostat, czyli Deska Galtona

Wiele automatów do gier, także tych w kasynach opiera się na idei wypadania kul z trójkątnej sieci kółków. W 1653 r. pewien bogaty szlachcic wynajął matematyka Blaise'a Pascala, aby ten objaśnił mu, czy ma szansę wygrać na tych maszynach. Pascal napisał książkę na temat trójkąta arytmetycznego, który stał się znany jako trójkąt Pascala. Trójkąt ten znany był Chińczykom już 500 lat przed opisaniem go przez Pascala i nadal służy do rozwiązywania obecnych problemów. Binostat pozwala uczniom odkrywać i wykorzystywać wzorce z trójkąta Pascala. Przede wszystkim mogą oszacować ile będzie kul, które ich zdaniem znajdują się na dziewięciu tacach zbierających, jeśli spadną, np. 100 kul w „gnieździe”. Następnie mogą to przetestować, zebrać i uporządkować wyniki oraz przedyskutować swoje odkrycia – czy wyniki były zgodne z oczekiwaniami? Dlaczego tak lub dlaczego nie?

Dzieci mogą wtedy rozpocząć matematyczne badania tego, co powinno się wydarzyć. Mogą również obserwować co stanie się, gdy umieścisz tacę do przechowywania poniżej drugiej linii z trzema kółkami:

Sprawiedliwość

Powiązany zagadnieniem jest sprawiedliwość. Zachęć uczniów do dyskusji na temat sprawiedliwości. Zadaj pytanie „Czy niektóre wydarzenia są sprawiedliwe, czy nie, używając reguł gry?”. Możesz sam wymyślić różne zasady lub poprosić o to uczniów. Poproś, aby przedyskutowali wymyślone reguły. Zachęć ich do zagrania w gry, prześledź ich zasady i zdecyduj, które z nich są sprawiedliwe. Pamiętaj o wyjaśnieniu dlaczego.



To niesprawiedliwe!

Oto kilka przykładów:

- Rzucam kostką. Jeśli liczba jest większa niż cztery, wygrywasz Ty. Jeśli wyrzucę cztery lub mniejszą liczbę, wygrywam ja.
- Rzucam kostką. Jeśli liczba jest parzysta, wygrywam ja. Jeśli jest nieparzysta, wygrywasz Ty.
- Trzeba dowiedzieć się, którego dnia tygodnia wszyscy zgromadzeni się urodzili. Jeśli najpopularniejszym dniem będzie sobota lub niedziela, wygrywam ja, jeśli pozostały dzień tygodnia, wygrywasz Ty.

Powyższe zadanie można wzbogacić o wymaganie od uczniów zdobywania informacji i rysowania schematów, obrazujących ich wyniki.

Alternatywnie możesz poprosić uczniów, aby zastanowili się ile każdy z nich powinien zrobić kanapek z serem lub szynką, by móc zaoferować sprawiedliwy wybór dla wszystkich osób z klasy. Czy zrobienie samych kanapek z szynką będzie sprawiedliwe? Podobną aktywnością może być rozdanie uczniom kolorowych przedmiotów

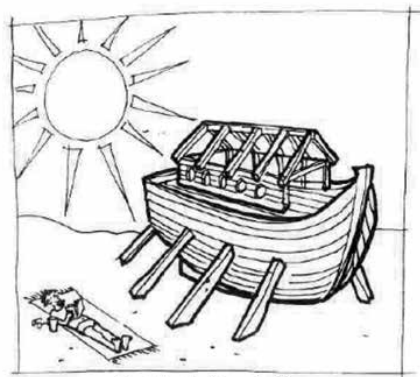
i poproszenie ich o włożenie kilku różnokolorowych do torby, w taki sposób, aby stworzona kompozycja dawała sprawiedliwą możliwość wyboru innemu uczniowi swojego ulubionego koloru.

Zdarzenia równoprawdopodobne

Podczas dyskusji uczniowie mogli zauważyć, że niektóre zdarzenia mają równe szanse na wystąpienie. Jest to pierwszy krok w kierunku bardziej precyzyjnego oszacowania prawdopodobieństwa. Dobrym sposobem na wprowadzenie idei zdarzeń równoprawdopodobnych może być podanie niniejszego przykładu:

- Jeśli urodzi się dziecko, szansa na to by było dziewczynką jest taka sama jak na to, by było chłopcem.

Możesz poprosić uczniów, aby wymyślili wydarzenia, które według nich mają jednakową szansę wystąpienia. Następnie mogą omówić te wydarzenia i zastanowić się, czy rzeczywiście są one równoprawdopodobne, czy może bardziej lub mniej prawdopodobne.

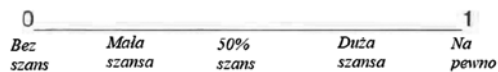


Czy jutro będzie padać?

Subiektywne szacowanie

Czy jutro będzie padać?

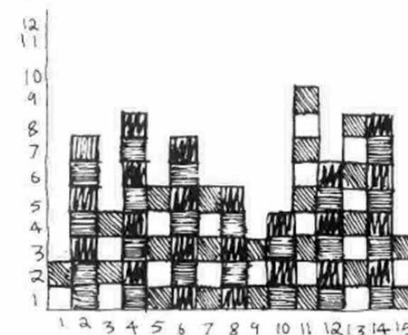
Dowiemy się o tym jutro. Tymczasem uczniowie mogą podać przybliżone prawdopodobieństwo za pomocą prostej skali, takiej jak pokazano poniżej:



Uczniowie mogą być zachęceni do omawiania tego prawdopodobieństwa i uzasadniania swoich szacunków za pomocą takich czynników jak: czy dzisiaj padało?, czy to jest zima?, czy często pada w tej części świata? itp.

Piętnastokrotny rzut dwoma kostkami

wyniki

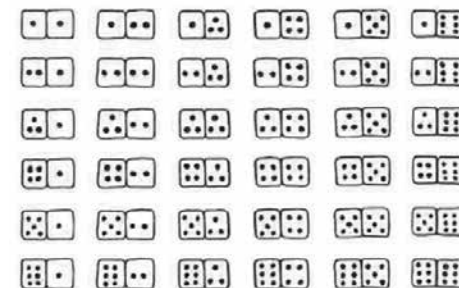


Wyniki 10, 11 i 12 nie zostały w ogóle osiągnięte.

Dlaczego tak jest? Dlaczego na wykresie środkowe wyniki uzyskane były częściej niż te skrajne?

Uczniowie mogą wymienić jakie są możliwości uzyskania wyników. Powinni zwrócić uwagę na to, że innym zdarzeniem jest sytuacja, w której na pierwszej kostce uzyskamy wynik 3, a na drugiej 4 oraz sytuację, w której wynik 4 będzie na pierwszej kostce, a 3 na drugiej. W zobrazowaniu takiej sytuacji pomaga użycie kostki w różnych kolorach. Używanie usystematyzowanej listy może pomóc w wyjaśnieniu wszelkich niejasności.

Diagram pokazuje wszystkie możliwe kombinacje przy rzucie dwoma kostkami



Kolejną metodą wykorzystywaną do analizowania powyższej sytuacji jest wykorzystanie tabeli obok:

Poniżej przedstawione są typowe wyniki pięćdziesięciokrotnego rzutu dwoma monetami:

BRAK RESZKI 12 JEDNA RESZKA 23 DWIE RESZKI 15

Po przeprowadzeniu kilku eksperymentów powinno wyklarować się, że jedna reszka pojawia się około dwa razy częściej niż każdy z dwóch pozostałych przypadków, a dwie reszki pojawiają się mniej więcej raz na cztery rzuty.

Jeśli rozróżnimy dwie monety możemy wymienić wszystkie możliwe zdarzenia:

W rzeczywistości są cztery możliwe zdarzenia, ponieważ dwie z nich

Możliwe wyniki przy rzucie dwoma monetami				
Pierwsza moneta	O	O	R	R
Druga moneta	O	R	O	R
	Możliwość 1.	Możliwość 2.	Możliwość 3.	Możliwość 4.

dają możliwość otrzymania jednej reszki. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania dwóch reszek wynosi tylko $\frac{1}{4}$.

Co się stanie jeśli rzucisz dwoma kostkami i dodasz do siebie liczbę wyrzuconych oczek?

Taka sytuacja również może być przeprowadzona przez uczniów w formie eksperymentu. Maksymalnym wynikiem jaki można otrzymać jest 12, stąd uczniowie często utrzymują, że możliwe wyniki plasują się w zakresie od 1 do 12, ale szybko zdają sobie sprawę, że wynik 1 jest niemożliwy do uzyskania. Omówienie takiej sytuacji jest idealnym krokiem do wprowadzenia pojęcia prawdopodobieństwa i zainteresowania uczniów do poszukiwania odpowiedzi na pytanie jakie rezultaty są możliwe do uzyskania. Właściwe wyniki są przedstawione dalej:

Można z tego zrobić długoterminowy projekt, a uczniowie mogą wykonywać notatki, przechowywać zapisy i analizować jaka pogoda następuje po deszczowych dniach. Pogoda jest doskonałym źródłem dla gromadzenia różnorodnych danych. Możemy zawsze obserwować pogodę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że następnym deszczowej pogody będzie nadal deszczowa pogoda? Ze starszymi dziećmi można przeprowadzić dyskusję na temat przewidywania pogody i sposobu w jaki sposób należy to zrobić.

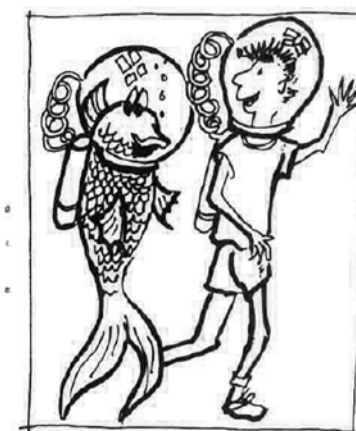


Może nasi prognostycy dołączą prawdopodobieństwa do swoich prognoz, jak ma to miejsce na przykład w telewizji. Prognostycy telewizyjni często używają takich zwrotów jak: „szansa na przelotne opady”, „duże prawdopodobieństwo licznych burz”, „deszcz porusza się na południe, ale prawdopodobnie rozproszy się zanim dotrze do Londynu”.

Uczniowie mogą szacować różne wydarzenia, które mogą prowadzić do dyskusji społecznych, historycznych, naukowych i innych, na przykład:

Czy dożyjesz 100 lat?

Uczeń musiałby długo czekać, aby poznać odpowiedź na powyższe pytanie. Na czym mogą opierać swoje opinie? Czy w ich rodzinach występuje długowieczność? („Mój pradziadek przeżył 93 lata, a mama mówi, że też będzie żyła tak długo.”) Czy ma na to wpływ zdrowie, palenie, ćwiczenia fizyczne, dieta? Czy ludzie żyją coraz dłużej? Biblia mówi o „sześćdziesięciu i dziesięciu



Ryby będą chodzić, mówić i nosić kosmiczne kombinezony.

latach”, ale średni wiek śmierci w XVIII w wynosił 30 lat. Aktualne statystyki pokazują rosnącą liczbę seniorów, zmieniającą równowagę populacji, co ma konsekwencje dla całego społeczeństwa.

Pewnego dnia

- ludzie będą żyć wiecznie,
- będziemy rozmawiać ze zwierzętami,
- ryby będą chodzić,
- dinozaury powrócą,
- wszyscy będą nosić kombinezony kosmiczne,
- nikt nie będzie jadł mięsa,
- wszyscy będą tylko chodzić lub jeździć rowerem,
- samochody zostaną wycofane,
- nie będzie podziału na państwa,
- będzie tyle samo kobiet na stanowiskach przywódczych co mężczyzn,
- szkoły/nauczyciele zostaną zastąpieni przez komputery,
- ludzie będą żyli na księżycu,
- wszyscy będą mówić w tym samym języku.

Szacowanie prawdopodobieństw

Pierwszym krokiem do szacowania dokładniejszego prawdopodobieństwa jest ustalenie wszystkich równie prawdopodobnych wyników zdarzeń. Na przykład, dziecko może być chłopcem lub dziewczynką, rzucając kostką można otrzymać wynik 1, 2, 3, 4, 5 lub 6, karta do gry może mieć kolor czarny lub czerwony. To pomaga uczniom zobaczyć, że kiedy wszystkie zdarzenia są równie prawdopodobne, prawdopodobieństwo, że którekolwiek z nich się wydarzy jest równe $1/n$, gdzie n oznacza ilość zdarzeń. Na przykład:

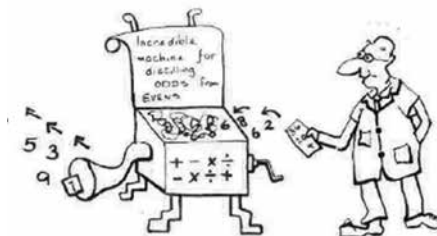
- Jeśli włożę pięć kartek z imionami do pudełka, prawdopodobieństwo wylosowania określonego imienia wyniesie $\frac{1}{5}$.
- Jeśli rzucę kostką, prawdopodobieństwo otrzymania 6 wyniesie $\frac{1}{6}$.

Prawdopodobieństwa te są oparte na równie prawdopodobnych wynikach. Inne prawdopodobieństwa są oparte na badaniach statystycznych,

np. prawdopodobieństwo, że się dziś uśmiechnę lub że będzie padać w tym roku. Jedni uczniowie będą zwolennikami rozpoznawania sytuacji, w których szacowanie prawdopodobieństwa opiera się na badaniach statystycznych, inni natomiast, gdy oparte są na równie prawdopodobnych wynikach. Zachęć uczniów do wymyślenia przykładów z każdego z wyżej omawianych przypadków i omówcie je.

Eksperymentowanie z prawdopodobieństwem

Początki prawdopodobieństwa miały miejsce w XVII wieku, głównie w analizie gier losowych. Pierwsze badania przeprowadzili Pascal (1623–1662) i Fermat (1601–1665). Istotne jest, aby dzieci miały świadomość, że matematyka została stworzona przez ludzi, więc warto przytaczać niektóre historie odkryć matematycznych. Dobrze jest również uświadomić uczniom, że matematycy popełniali błędy, dzięki którym, po dokładnej analizie, dochodzili do prawidłowych rozwiązań!



Francuski matematyk d’Alembert w 1754 roku, zastanawiał się, czy dwie wyrzucone monety wyłądują reszką do góry. Był przekonany, że są trzy możliwości: brak reszek, jedna reszka, dwie reszki. Stąd prawdopodobieństwo uzyskania dwóch reszek wynosi 1 na 3, czyli $\frac{1}{3}$. D’Alembert był w błędzie! Mimo, że istnieją trzy możliwości, nie są one jednak równie prawdopodobne.

Uczniowie mogą przedyskutować prawdopodobieństwa wyrzucenia każdej kombinacji reszek i orłów podczas rzutu dwiema monetami, a następnie mogą przeprowadzić eksperyment, aby sprawdzić, czy ich prawdopodobieństwa były prawidłowe. Podczas wykonywania eksperymentu istotne jest, aby uczniowie wykonali kilka oddzielnych eksperymentów, np. dziesięciokrotne rzucenie monetami i powtarzanie tych eksperymentów trzy razy. Pomaga to uczniom uświadomić sobie, że różne wyniki mogą być skutkiem powtarzania eksperymentu. Świadomość problemu rozwija również porównywanie wyników z innymi grupami, wykonującymi ten sam eksperyment.