OSTRZEżENIA!

1. Zabawka przeznaczona jest dla dzieci powyżej 3 lat. Zawiera małe elementy – ryzyko zadławienia.
2. Do użytku pod bezpośrednim nadzorem osoby dorosłej
3. Należy zachować opakowanie lub/i instrukcję. Zawierają one ważne informacje mogące być przydatne w przyszłości.
4. **Użytkowanie niezgodne z zaleceniami zwalnia producenta od odpowiedzialności za ewentualne szkody.**

nowa szkoła
ul. POW 25, 90-248 Łódź,
www.nowaszkola.com
tel. (42) 630 17 28,
(42) 630 04 88, fax: (42) 632 73 28

Geometryczny łamaniec. Ćwiczenia geometryczne

IV 4159

SI IN IV 4159 08/17

Źródło: H. Show, *Matematyka. Zrozum geometrię*, „Dynamiczna geometria" , D.C.P.

Geometryczny łamaniec to paski w czterech kolorach: czerwonym, niebieskim, żółtym i białym. W każdym kolorze występują różne długości, a różnica długości między dwoma paskami jest mierzona odległością między poszczególnymi otworami.

W niniejszym przewodniku paski będą oznaczane literami i cyframi w następujący sposób:

CZERWONE PASKI

R3 jest dwa razy dłuższy niż R2 i R2 jest dwa razy dłuższy niż R1, R3 jest cztery razy dłuższy niż R1 (otwory w R3 dzielą pasek na cztery równe części).

NIEBIESKIE PASKI

B2 jest dwa razy dłuższy niż B1.

ŻÓŁTE PASKI

Y2 jest dwa razy dłuższy niż Y1 (otwory bo bokach środkowego otworu dzielą paski na trzy równe części).

BIAŁE PASKI

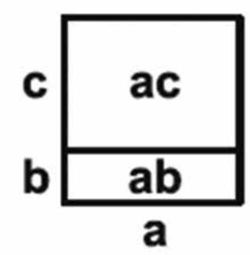
Białe paski mają specjalne długości. W2 jest dłuższy niż W1. Paski łączą się z pomocą mosiężnych łączników.

Dla nauczycieli

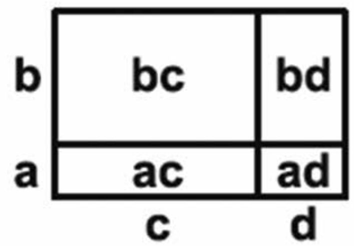
B1 to R1 √2, B2 to R2 √2,
Y1 to R1 √3, Y2 to R2 √3,
W1 to R1 √5

Geometria jest zwykle badana przy pomocy sztywnych układów nieelastycznych elementów. Wiele właściwości geometrycznych łatwiej i wyraźniej można wyjaśnić za pomocą modeli elastycznych takich jak ten. Geometryczny łamaniec sprawia, że geometria staje się dynamicznym przedmiotem.

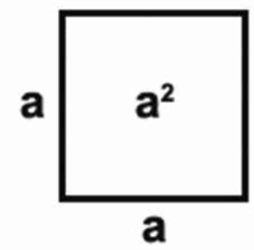
Sekcja 11 – Wzory skróconego mnożenia



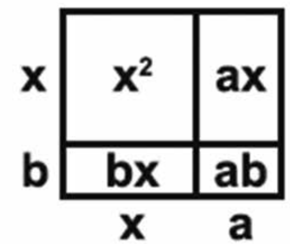
$a(b + c)$



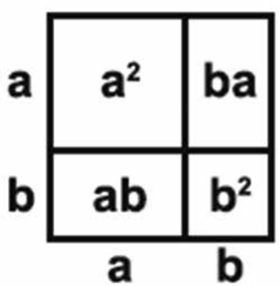
$(a + b)(c + d)$



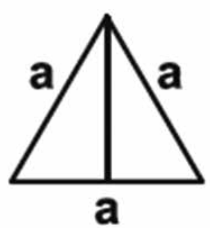
a^2



$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

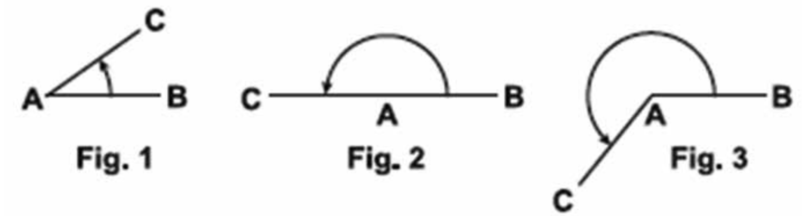


$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



Wyznacz wzór na wysokość trójkąta równobocznego.

Sekcja 1 – Kąty (1)



Połącz dwa paski R3. Przekręć jeden pasek z AB na AC (Fig. 1). Płaszczyzna pomiędzy AB i AC jest nazywana KĄTEM. Kontynuuj obracanie, aż CAB będzie linią prostą (Fig. 2). Dalej kontynuuj obracanie, aż AB i AC znów się połączą. AC wyznaczył koło. Jednostkę pomiaru kąta nazywa się stopniem i zapisuje °. Kąt pełny ma 360 stopni (360°). Kąty można mierzyć za pomocą kątomierza. Przyjrzyj się kątomierzowi. Dlaczego są na nim dwa zestawy cyfr?

Obracaj AC, aż AC i AB wyznaczą ćwiartkę koła, 90°. Ten kąt nazywany jest KĄTEM PROSTYM.

Kąt mniejszy od kąta prostego nazywany jest KĄTEM OSTRYM.

Kąt większy od kąta prostego, ale mniejszy od 180° nazywamy KĄTEM ROZWARTYM.

Kiedy AC wyznaczy z AB linię prostą otrzymamy 180°. Kąt taki nazywamy KĄTEM PÓŁPEŁNYM.

Kąt większy od kąta półpełnego (Fig. 3), ale mniejszy od pełnego nazywamy KĄTEM WKLĘSŁYM.

Zamocuj dwa paski R1 razem i umieść je na paskach R3, tak aby punkty A były ze sobą połączone. Obróć dwa zestawy pasków razem. Czy długość paska ma znaczenie dla wielkości kąta?

Połącz dwa paski R1, aby uzyskać kąt prosty. Użyj tego kąta, aby zmierzyć kąty proste w klasie, np. książki na rogach, ławki, blaty szafek itp.

Sekcja 2 – Kąty (2)

1. Ile stopni ma kąt prosty?

2. Ile stopni ma kąt ostry? Twój nauczyciel pokaże Ci jak używać kątomierza.

3. Narysuj kąty o podanych miarach: 30°, 15°, 45°, 20°, 60°, 72°, 90°, 108°, 120°, 135°, 150°, 165°.

4. Narysuj dwie półproste, tworzące kąt i zmierz miarę tego konta.

Fig 1

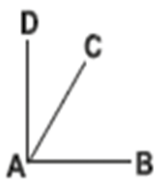
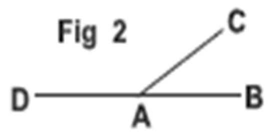


Fig 2



Stwórz Fig. 1, wykorzystując trzy paski R3. Ustaw kąt DAB na 90°. Przesuwaj AC na różne pozycje. Teraz są dwa kąty, CAD i CAB. Gdy kąt DAB jest kątem prostym, kąt CAB nazywany jest dopełnieniem kąta CAD i kąt CAD nazywany jest dopełnieniem kąta CAB. Suma miar tych dwóch kątów wynosi 90°.

Stwórz Fig. 2 za pomocą jednego paska R3 i jednego B2. Kiedy kąt DAB jest kątem półpełnym, kąt CAB jest kątem przyległym do kąta CAD i kąt CAD jest kątem przyległym do kąta CAB. Suma miar tych dwóch kątów wynosi 180°.

Narysuj tę tabelę w swoim zeszycie i znajdź miary kątów dopełniających i przyległych do następujących kątów: 30°, 45°, 60°, 72°, 90°, 108°, 120°, 135°.

Kąt dopełniający	Podany kąt	Kąt przyległy
	30°	

Narysuj kąt prosty jak Fig. 1. Narysuj AC w różnych pozycjach i zmierz miary otrzymanych kątów. Zapisz wyniki swoich pomiarów. Czy suma miar kątów CAD i CAB wynosi 90°?

Narysuj linię prostą i półprostą AC w różnych pozycjach tak jak Fig. 2. Zmierz miary otrzymanych kątów. Czy suma miar kątów CAD i CAB wynosi 180°?

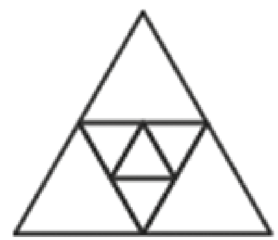
Pięciokąt foremny

Sześciokąt foremny

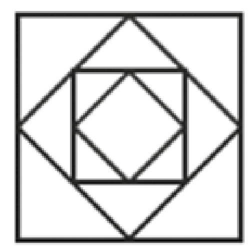
Ośmiokąt foremny

Dziesięciokąt foremny

Y2



R



R ; B

Sekcja 10 – Wielokąty (2)

Wielokąty o wszystkich kątach równej miary i bokach równej długości nazywamy WIELOKĄTAMI FOREMNYMI.

Wielokąty można budować układając paski pod wskazanymi kątami.

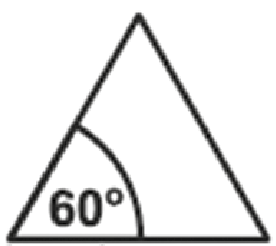
Pięciokąt może być wyznaczony przez pięcioramienną gwiazdę.

Ułóż sześciokąt za pomocą pasków Y1. Paski Y2 zmieszczą się między przeciwnymi wierzchołkami. Sześciokąt możne być wyznaczony za pomocą sześcioramiennej gwiazdy.

Ułóż ośmiokąt za pomocą pasków R1. Paski W2 zmieszczą się między przeciwnymi wierzchołkami. Ośmiokąt może być wyznaczony za pomocą ośmioramiennej gwiazdy.

Dziesięciokąt może być wyznaczony za pomocą dziesięcioramiennej gwiazdy, a dwunastokąt za pomocą dwunastoramiennej gwiazdy.

Użyj Geometrycznego łamańca do ułożenia geometrycznych wzorów. Poniżej i obok kilka pomysłów:



Trójkąt równoboczny

Kwadrat

Sekcja 3 – Trójkąty (1)

„Trój-” oznacza trzy. Co to znaczy np. trójwarstwowy? Trójkąt ma trzy boki. Połącz ze sobą trzy paski, aby uzyskać trójkąt. Weź inny zestaw tych samych pasków i spróbuj zrobić kształt inny niż pierwszy. Czy dwa otrzymane trójkąty mają dokładnie takie same kształty? Trójkąt jest sztywną figurą. Nie można zmienić jego kształtu. Dlatego trójkąty są używane do budowania mostów, wież, słupów itp. Zwróć uwagę na użycie trójkątów w architekturze i zapisuj, gdzie je widzisz.

1. Stwórz trójkąt z (a) dwóch pasków R2 i jednego B1, (b) trzech pasków Y1, (c) jednego paska R1, jednego R2 i jednego Y1, (d) jednego paska R1, jednego R2 i jednego B1, ø jednego paska R2, jednego W1 i jednego Y1. Poniżej kilka ważnych informacji na temat tych trójkątów:

Trójkąt (a) ma ……….. równe boki. Nazywany jest TRÓJKĄTEM RÓWNORAMIENNYM. Zrób kolejny trójkąt w tym samym kształcie i umieść je jeden nad drugim. Obracaj jednym trójkątem względem drugiego, a zauważysz, że trójkąt równoramienny ma również dwa kąty .... Te kąty są .... równych bokach.

Trójkąt(b) ma trzy ………………. boki i trzy ………… kąty. Możesz to udowodnić poprzez ułożenie takiego samego trójkąta jeden na drugim. Nazywany jest on TRÓJKĄTEM RÓWNOBOCZNYM.

Trójkąt (c) ma jeden kąt …………………... Nazywa się on trójkątem ……………….. .

Trójkąt (d) ma jeden kąt …………………… . Nazywa się on trójkątem ………………… .

Trójkąt (e) ma trzy kąty ……………... Nazywa się on trójkątem ………………. Ponadto ma boki …………… długości. Nazywany jest też TRÓJKĄTEM RÓŻNOBOCZNYM.

2. Użyj różnych pasków do stworzenia następujących trójkątów: (a) trójkąt rozwartokątny, (b) trójkąt ostrokątny, (c) trójkąt równoboczny, (d) trójkąt różnoboczny, (e) trójkąt równoramienny, (f) trójkąt prostokątny.

3. Dokończ zdania:

(a) **Trójkąt różnoboczny ma ………………………………………………...…….**

(b) **Trójkąt ostrokątny ma ……………………………………………………..**

(c) **Trójkąt równoboczny ma ……………………………………….....………**

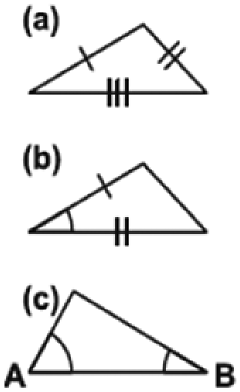
(d) **Trójkąt rozwartokątny ma …………………………………………......……….**

(e) **Trójkąt prostokątny ma ………………………………………………………**

(f) **Trójkąt równoramienny ma ………………………………………........…….**

Sekcja 4 – Trójkąty (2)

Kilka informacji na temat trójkątów.



Jeśli jeden trójkąt może być dopasowany dokładnie do innego trójkąta, to te dwa trójkąty nazywamy TRÓJKĄTAMI PRZYSTAJĄCYMI. Są one dokładnie takie same. Jeśli chcemy skopiować trójkąt dokładnie, musimy zastosować jedną z trzech cech przystawania trójkątów:

a. bok bok bok (bbb).

Stwórz dwa trójkąty, używając tego samego rodzaju pasków. Umieść jeden trójkąt na drugim. Czy oba trójkąty są dokładnie takie same?

b. bok kąt bok (bkb)

Zrób, przy pomocy kątomierza, kąt o mierze 30° i użyj do tego pasków Y2 i R3. Którym paskiem dokończysz trójkąt? Zrób kolejny trójkąt używając tych samych pasków i kąta. Umieść jeden nad drugim. Czy oba trójkąty są dokładnie takie same?

c. kąt bok kąt (kbk)

Ustaw pasek R2 tak, aby kąt przy wierzchołku A wynosił 60°, a Y2 tak, aby kąt przy wierzchołku B wynosił 30°. Bok AB wykonaj z paska R3. Powtórzy to z innym zestawem pasków. Czy otrzymujesz taki sam wynik? Powtórz z trzema paskami Y2. Ustaw kąty przy wierzchołkach A i B na 60°. Powtórz używając R3 dla AB i dwóch pasków B2. Ustaw kąty na A i B na 45. We wszystkich tych ćwiczeniach zmierz drugi kąt w trójkącie i dodaj razem trzy kąty. Uzupełnij: suma kątów trójkąta równa .... stopni.

Narysuj na kartce dowolny trójkąt. Potnij trójkąt na trzy części (Fig. 1) i ułóż je razem (Fig. 2). Ćwiczenie to pokazuje, że suma kątów trójkąta wynosi 180°.

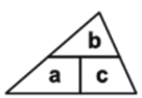


Fig. 1

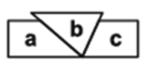


Fig. 2

Nauczyciel pokaże Ci jak narysować trójkąty na podstawie cech przystawania trójkątów. Narysuj te trójkąty:

bbb (a) 4cm, 3cm, 5cm (b) 7cm, 4cm, 6cm, (c) 5cm, 2cm, 5cm

bkb (a) 4cm, 60°, 4cm (b) 4cm, 90°, 3cm (c) 5cm, 120°, 6cm

kbk (a) 60°, 6cm, 30° (b) 45°, 8cm, 45° (c) 50°, 6cm, 70°

Sekcja 9 – Wielokąty (1)

Wiele pasków połączonych ze sobą, tworząc zamkniętą figurę, nazywa się WIELOKĄTEM (wielo-kąt „wiele kątów"). Gdy boki nie mają równej długości, nazywa się WIELOKĄTEM RÓŻNOBOCZNYM.

Wielokąt z trzema bokami nazywa się ……………………… .

Wielokąt z czterema bokami nazywa się ……………………… .

Wielokąt z pięcioma bokami nazywa się PIĘCIOKĄTEM.

Wielokąt z sześcioma bokami nazywa się SZEŚCIOKĄTEM.

Wielokąt z ośmioma bokami nazywa się OŚMIOKĄTEM.

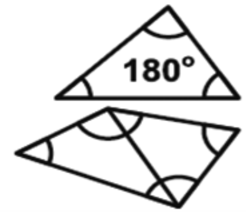
Wielokąt z dziesięcioma bokami nazywa się DZIESIĘCIOKĄTEM.

Wielokąt z dwunastoma bokami nazywa się DWUNASTOKĄTEM.

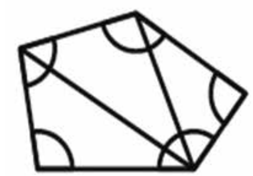
Suma miar wszystkich kątów w trójkącie wynosi 180°.

Stwórz z pasków dowolny czworokąt. Połącz ze sobą przeciwległe wierzchołki. Powstały w ten sposób dwa trójkąty.

Suma miar wszystkich kątów czworokąta wynosi ……………… .



Ułóż pięciokąt. Podziel go na trójkąty. Znajdź sumę miar wszystkich kątów wewnętrznych pięciokąta.



Ułóż wielokąt różnoboczny. Podziel go na trójkąty.

Narysuj poniższą tabelę w swoim zeszycie i uzupełnij ją.

Nazwa wielokąta	Liczba boków	Suma miar kątów wewnętrznych
Trójkąt		
Czworokąt		
Pięciokąt		

Sekcja 8 – Trójkąty (3)

1. Ułóż trójkąt z Y2, B2 i R3. Połącz środki B2 i R3 z Y1, R3 i Y2 z B1 i Y2 i B1 z R2. Y1 jest równoległy do Y2 i jest równy połowie Y2. R2 jest ………….. do R3 i jest równe połowie ………… . B1 jest …………… do B2 i jest równe połowie ……….. .

ZAPAMIĘTAJ: Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do jego trzeciego boku i równy jego połowie.

2. Stwórz trójkąt równoboczny z trzech pasków Y2. Połącz środki jego boków za pomocą trzech pasków Y1. Czy paski Y1 są równe połowie pasków Y2? Czy są one równoległe do nich? Ile trójkątów równobocznych można policzyć?

3. PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW Ułóż trójkąt przy pomocy pasków R1, B1 i Y1. Drugi z pasków R2, B2 i Y2. Te dwa trójkąty nie są przystające (dokładnie takie same). Dlaczego nie? Kąty są .... ale trzy boki są .... Dwa trójkąty o takich samych kątach nazywane są TRÓJKĄTAMI PODOBNYMI.

$$\frac{R1}{R2} = \frac{B1}{B2} = \frac{Y1}{Y2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{R1}{R2}$ można zapisać R1:R2. Czytaj: R1 do R2.

Ułamek $\frac{R1}{R2}$ nazywany jest STOSUNKIEM R1 do R2.

$\frac{R1}{R2} = \frac{B1}{B2}$ można zapisać R1:R2=B1:B2 i czytamy:
„stosunek R1 do R2 jest równy stosunkowi B1 do B2”.

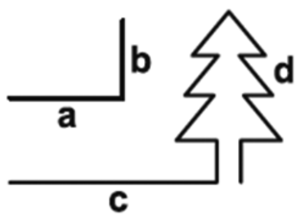
R1, R2, B1 i B2 są w PROPORCJI. Użyj pasków do ułożenia innych trójkątów podobnych.

4. Umieść jakiś przedmiot (b) na słońcu. Zmierz jego cień (a). Zmierz cień (c) rzucany przez drzewo lub budynek. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

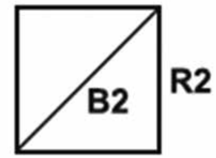
Jeśli a w stosunku do b jest takie samo jak c w stosunku do d, to proporcja jest równa:

a:b=c:d ad=bc d= $\frac{bc}{a}$

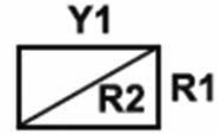
Użyj tej formuły do znalezienia wysokości budynków, trzew itp., wykorzystując cień użytego przedmiotu.



Sekcja 5 – Czworokąty (1)

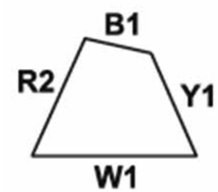


CZWOROKĄTY to figury o czterech bokach. Połącz ze sobą cztery paski R2. Kształt można zmieniać. Otrzymana figura nie jest sztywna. Można ją usztywnić, mocując pasek B2 z jednego wierzchołka do przeciwległego wierzchołka. Odcinek ten nazywa się PRZEKĄTNĄ. Bramy farm/zagród mają po przekątnej belki, aby je właśnie wzmocnić. Cztery paski R2 są równe, a kąty są prostopadłe. Figura ta to KWADRAT. Zdejmij teraz pasek B2. Kwadrat teraz może stracić swój kształt. Kąty nie są już kątami prostymi, ale boki są wciąż takie same. Są równej długości. Przeciwne kąty są równej miary. Ta figura nazwwa sie ROMB.



Połącz dwa paski R1 i dwa Y1 jak na rysunku. Usztywnij figurę, mocując pasek R2 jako przekątną otrzymanej figury. Kiedy czworokąt jest już usztywniony zmierz jego kąty. Wszystkie kąty są ………… miary. Przeciwległe boki są …………… długości. Figura ta nazywa się PROSTOKĄT. Zdejmij teraz przekątną. Kiedy prostokąt nie jest już usztywniony można zmienić jego kształt. Kąty nie są już równej miary. Przeciwległe boki nadal mają ……………… długość.

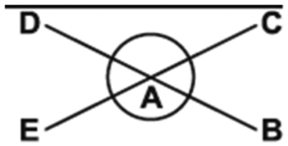
W każdym miejscu są one równo oddalone od siebie, jak linie kolejowe, czyli są RÓWNOLEGŁE. Figura ta nazywa się RÓWNOLEGŁOBOKIEM. Użyj kątomierza, aby udowodnić, że przeciwne kąty mają równą miarę. Stwórz czworokąt, jak pokazano na rysunku, używając pasków R2, B1, Y1 i W1. Boki nie są …………… długości. Figura ta nazywa się NIEREGULARNYM CZWOROKĄTEM. Można go przekształcić na dwa trójkąty. Gdy B1 i W1 są równoległe, czworokąt taki nazywa się TRAPEZEM.



Uzupełnij zdania:

1. **Kwadrat ma cztery boki ……………. długości i cztery kąty ……….. .**
2. **Romb ma cztery boki ……………… długości. Przeciwległe kąty są ……….. miary.**
3. **Prostokąt ma ………… boki i cztery kąty ………….………… boki są równej długości.**
4. **Równoległobok ma …………… boki. …………….. boki są …………….. długości i …………………… . Kąty w przeciwległych wierzchołkach są ………… miary.**
5. **Nieregularny czworokąt ma cztery boki …………… długości i cztery kąty …………… miary.**

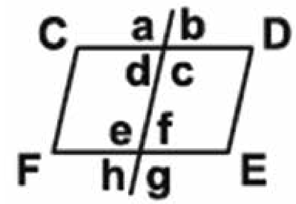
Sekcja 6 – Kąty (3)



KĄTY WIERZCHOŁKOWE

Połącz ze sobą dwa paski R3 środkowym otworem A. Powoli rozchyl paski. Ten sam ruch, który powiększa kąt CAB powiększa również kąt DAE. Są one nazywane KĄTAMI WIERZCHOŁKOWYMI i są równej miary. Zmierz je za pomocą kątomierza. Czy kąt CAD jest równy kątowi BAE?

Zrób równoległobok CDEF, używając dwóch pasków R3 i dwóch R2. Połącz dwa paski R3, umieszczając końcowy otwór jednego nad środkowym otworem drugiego tak, aby pasek był półtora razu dłuższy od R3. Przymocuj ten pasek przez środek równoległoboku, jak pokazano na rysunku.



Kiedy równoległobok CDEF jest gotowy, co zauważasz w kątach „a, b, c i d" i kątach „e, f, g i h"? Nauczyłeś się już o tych kątach „a"=....., „b"=......, „e"=......, „f"=...... . Czy kąt „b"=„f"? Czy kąt „g"="c"? Czy kąt „e"="a"? Czy kąt „h" jest równy kątowi ....?

Kąt „c" i kąt „g" nazywają się KĄTAMI ODPOWIADAJĄCYMI.

Kąt „d" i kąt „f" nazywają się KĄTAMI NAPRZEMIANLEGŁYMI.

Narysuj tę tabelę w swoim zeszycie. Użyj następujących danych do jej wypełnieni: 1.(a) 30°, 2.(b) 45°, 3.(c) 60°, 4.(d) 108°, 5.(e) 135°, 6.(f) 72°, 7.(g) 120°, 8.(h) 90°.

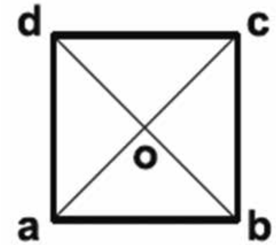
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	30°							
2		45°						
3			60°					

Spójrz na równoległobok CDEF. Co zapamiętałeś o odcinkach CD i FE? Odłóż paski R@, tworzące boki DE i CF. Czy kąty odpowiadające i naprzemianległe występują również wtedy, gdy CD i FE nie są równoległe?

Narysuj dwie proste, które nie są równoległe oraz prostą przecinającą te dwie proste. Zmierz kąty odpowiadające i naprzemianległe. Czy są równej miary? Co wiesz o prostych CD i FE, jeśli kąty odpowiadające i naprzemianległe są równej miary?

Czy możesz udowodnić, że c+f oraz e+d jest równe 180°?

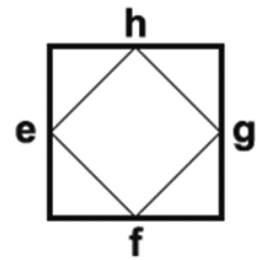
Sekcja 7 – Czworokąty (2)



Zbuduj kwadrat z czterech pasków R2. Przeciągnij cienką, elastyczną nić przez otwór (a), następnie przeciągnij ją dołem do (c), górą do (b) i dołem do (d). Zawiń i zamocuj. Kiedy paski tworzą kwadrat, wyznaczone przekątne są .... Przecinają się w .... w punkcie (o). Przekątne połowią się. „Połowią się" oznacza „dzielą się na dwie równe części". ao = oc, do = ob, ao = od. Kiedy paski tworzą romb, przekątne nie są ...., ale .... się nawzajem, ao = oc, ob = od, ale ao nie równa się od.

Użyj różnokolorowej nici, aby połączyć środki pasków. Przeprowadź nić przez (e), dołem przez (f), górą przez (g), dołem przez (h), zawiń i zamocuj.

Kiedy paski tworzą kwadrat, elastyczna nić łącząca środki boków to .... Kiedy figura jest rombem, elastyczna nić łącząca środki boków staje się ....



Ułóż równoległobok za pomocą dwóch pasków R2 i dwóch B2. Wyznacz elastyczną przekątną i połącz środki boków za pomocą różnokolorowej nici. Przekątne .... się. Kiedy figura jest .... przekątne są równej długości. Kiedy figura jest prostokątem, nić łącząca środki jego boków wyznacza figurę, która jest .... Kiedy figura jest równoległobokiem, nić łącząca środki jego boków wyznacza figurę, która jest ....

Ułóż czworokąt z pasków B1, R2, W1 i Y1. Zaznacz przekątne i połącz środki jego boków za pomocą elastycznej nici. Co zauważyłeś?